

# 仮想仕事の原理



## ③ ダイバージェンスの定理

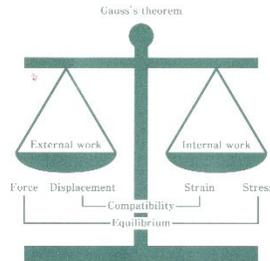
城戸將江・津田恵吾 2021.04

# 仮想仕事の原理とエネルギー原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月

## 仮想仕事の 原理と エネルギー原理

トラス, 梁, 骨組



Keiyo ISUDA Masae KIDO  
津田恵吾 / 城戸将江 (共著)

Virtual work and energy principles  
for trusses, beams and frames

鹿島出版会

ISBN978-4-306-03388-7  
C3052 ¥3500E

鹿島出版会

定価(本体3,500円+税)

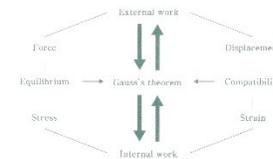


9784306033887



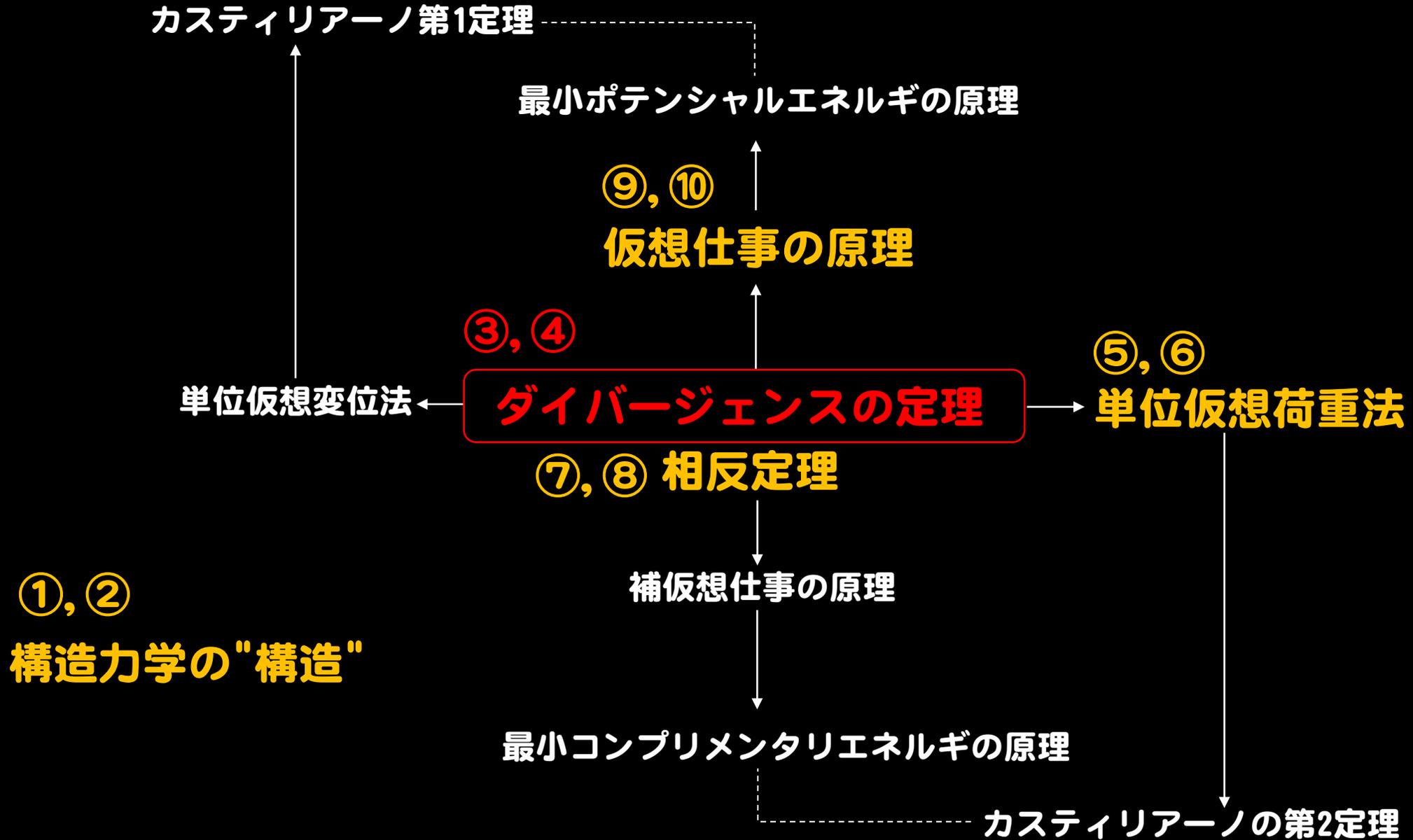
1923052035006

仮想仕事の  
原理と  
エネルギー原理  
トラス, 梁, 骨組



Virtual work and energy principles for trusses, beams and frames

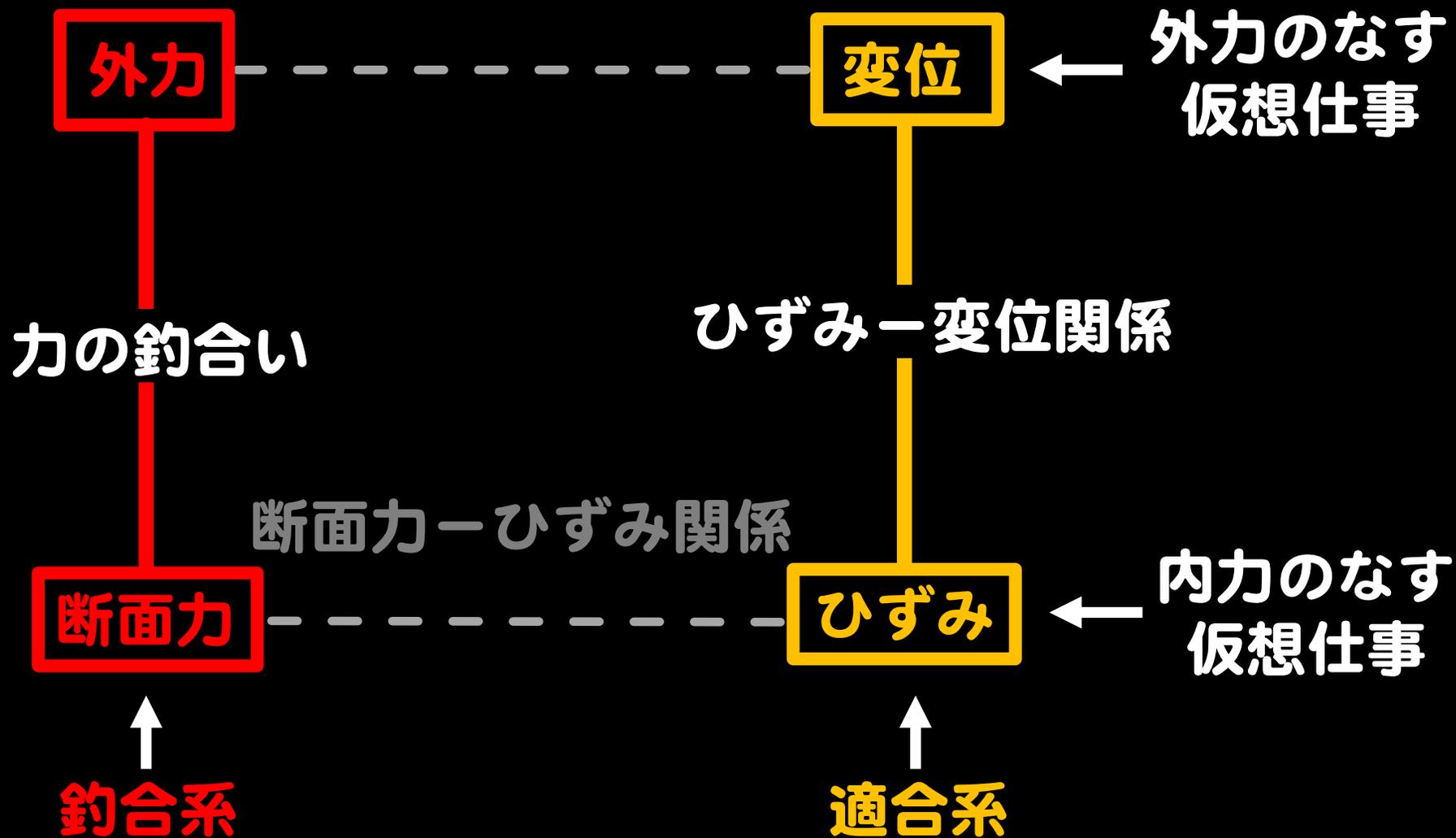
# 仕事の原理・エネルギー原理の概観



# 概要1

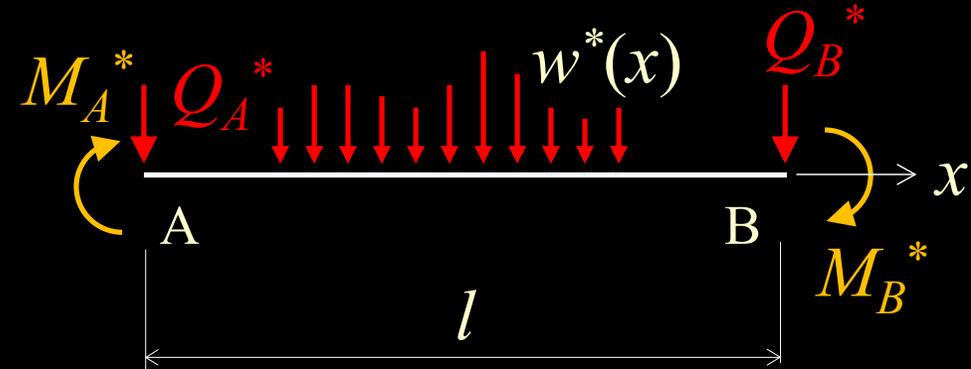
- 1) 釣合系
- 2) 適合系
- 3) 外力のなす仮想仕事
- 4) 内力のなす仮想仕事
- 5) ガウスの発散定理
- 6) 力の釣合い・力学的境界条件
- 7) ひずみー変位関係・幾何学的境界条件
- 8) 断面力ーひずみ関係 ← 使わない

# 概要2

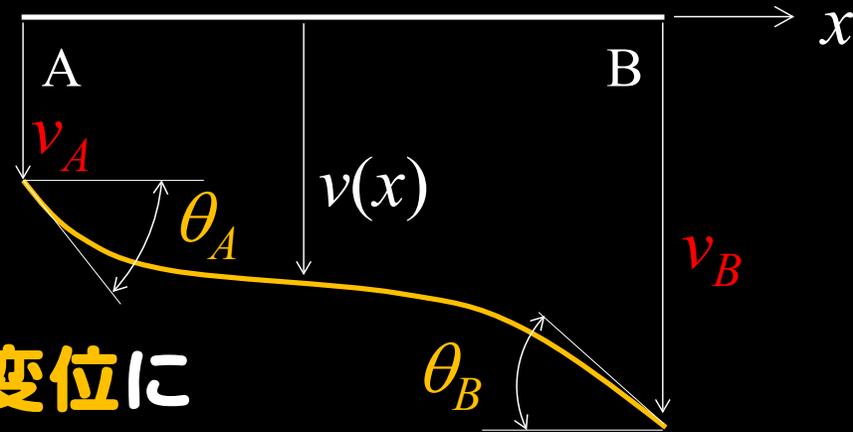


# 釣合系の外力と適合系の変位

釣合系の外力



適合系の変位



釣合系の外力が適合系の変位に対してなす仮想仕事

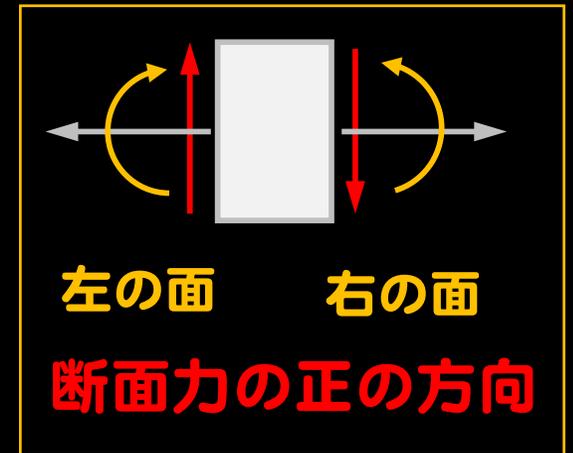
$$Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x) v(x) dx$$

# 定理の誘導で用いる関係

## 1) 釣合系

力学的境界条件  $Q_A^* = -Q^*(0)$ ,  $M_A^* = M^*(0)$ ,  $Q_B^* = Q^*(l)$ ,  $M_B^* = -M^*(l)$

釣合い式  $Q^{*'}(x) = -w^*(x)$ ,  $Q^*(x) = M^{*'}(x)$



## 2) 適合系

幾何学的境界条件  $v_A = v(0)$ ,  $\theta_A = v'(0)$ ,  $v_B = v(l)$ ,  $\theta_B = v'(l)$

ひずみ-変位関係  $\phi(x) = -v''(x)$

## 3) ガウスの発散定理 (1次元では定積分)

$$\int_0^l f'(x) dx = [f(x)]_0^l$$

$$[Q^*(x) \cdot v(x)]_0^l = \int_0^l (Q^*(x) \cdot v(x))' dx$$

$$[M^*(x) \cdot v'(x)]_0^l = \int_0^l (M^*(x) \cdot v'(x))' dx$$

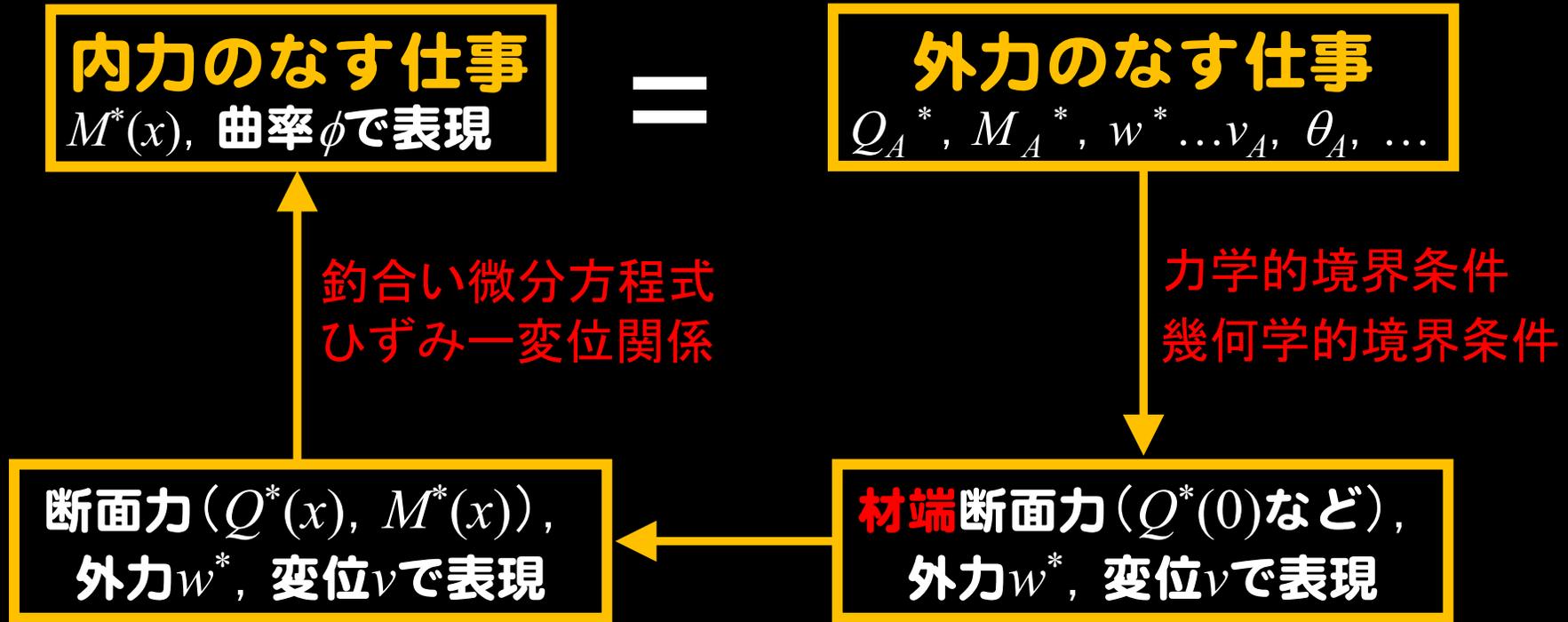
# ダイバージェンスの定理の誘導

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx \\ \textcircled{2} \quad & = -Q^*(0) \cdot v(0) + M^*(0) \cdot v'(0) + Q^*(l) \cdot v(l) - M^*(l) \cdot v'(l) + \int_0^l w^*(x)v(x)dx \\ \textcircled{3} \quad & = [Q^*(x) \cdot v(x)]_0^l - [M^*(x) \cdot v'(x)]_0^l + \int_0^l w^*(x)v(x)dx \\ \textcircled{4} \quad & = \int_0^l (Q^*(x) \cdot v(x))' dx - \int_0^l (M^*(x) \cdot v'(x))' dx + \int_0^l w^*(x)v(x)dx \\ \textcircled{5} \quad & = \int_0^l \underline{Q'^*(x) \cdot v(x)} dx + \int_0^l \underline{Q^*(x) \cdot v'(x)} dx - \int_0^l \underline{M'^*(x) \cdot v'(x)} dx - \int_0^l \underline{M^*(x) \cdot v''(x)} dx + \int_0^l w^*(x)v(x)dx \\ \textcircled{6} \quad & = -\int_0^l M^*(x) \cdot v''(x) dx \\ \textcircled{7} \quad & = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x) dx \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \underline{Q'(x) = -w(x)}, \\ \underline{M'(x) = Q(x)} \end{array}$$

## ダイバージェンスの定理

$$Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x)dx$$

# 定理の誘導の流れ

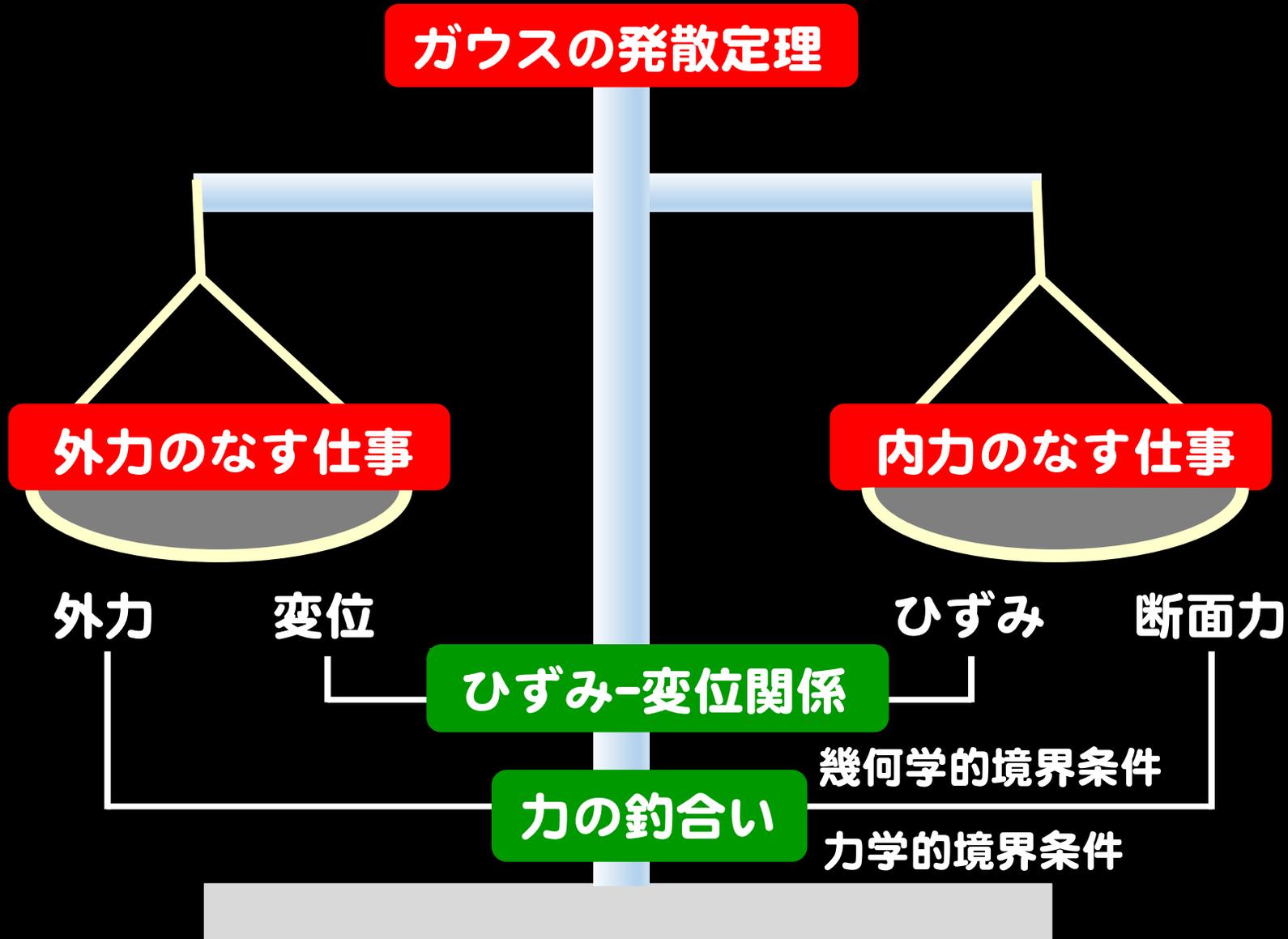


## ガウスの発散定理

$$[Q^*(x) \cdot v(x)]_0^l = \int_0^l (Q^*(x) \cdot v(x))' dx$$

$$[M^*(x) \cdot v'(x)]_0^l = \int_0^l (M^*(x) \cdot v'(x))' dx$$

# ダイバージェンスの定理概念図



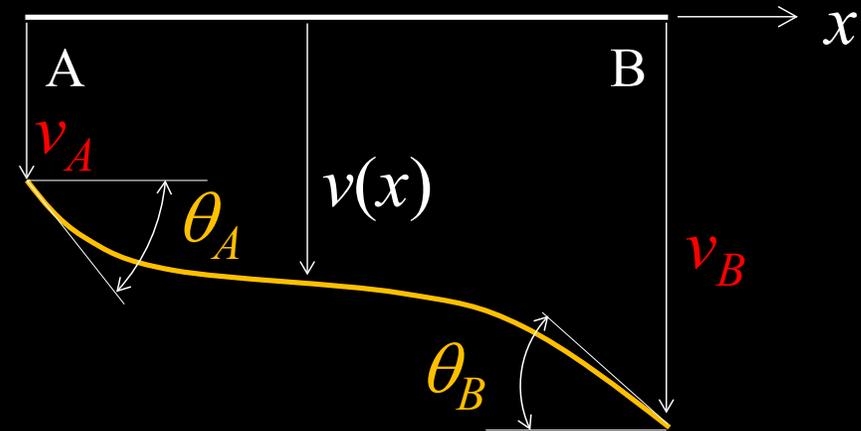
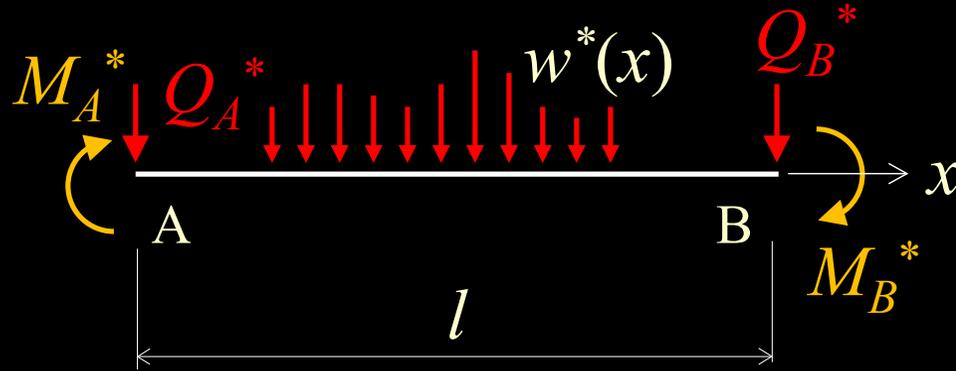
# まとめ

## ダイバージェンスの定理

$$Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x)dx$$

外力のなす仮想仕事

内力のなす仮想仕事



釣合系の外力

適合系の変位

# ポイント1

- 1) 釣合系と適合系の幾何学的境界条件は異なっても良い。
- 2) ダイバージェンスの定理は、力の釣合い式・力学的境界条件、ひずみ-変位関係、幾何学的境界条件を内包している。
- 3) 断面力-ひずみ関係は用いていない。
- 4) 外力のなす仕事は、釣合系の外力×適合系の変位、内力のなす仕事は  $\int_0^l M^*(x) \cdot \phi(x) dx$

# ポイント2

- 1) 釣合系の外力を単位1とし、線形弾性体とすると、単位仮想荷重法となる。
- 2) 別々の釣合系1と2で、釣合系1による適合系1と釣合系2による適合系2があるとする。釣合系1と適合系2、釣合系2と適合系1のダイバージェンスの式で、線形弾性体を仮定すると、相反定理が得られる。
- 3) ひずみ-変位関係、幾何学的境界条件を与えると、力の釣合式・力学的境界条件がえられる。仮想仕事の原理である。

# 次の解説について

以上説明したダイバージェンスの定理  
を用いた例題を

④ **ダイバージェンスの定理** 例題

で解説します。

# 質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています。

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します。

質問等の送付先は，ホームページに示しています。

2021年4月版